

 Nantes
Université



Quandles : groupes de cohomologie VS. groupes
associés

Adrien CLÉMENT
M2 Mathématiques Fondamentales et Appliquées : Algèbre et Géométrie
Nantes Université

Encadré par Victoria LEBED
au Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Caen

3 avril 2023 - 2 août 2023

Table des matières

1	Généralités	2
1	Racks et quandles	2
	A Définitions	2
	B Coloriages de diagrammes	3
	C Groupes associés à un rack et leurs actions	8
2	Homologie	13
	A Motivation	13
	B Homologie de rack	16
	C Homologie de quandle	16
3	CW-complexe associé à un rack	17
	A Description des cellules	18
	B Homologie	19
	C Homotopie	19
2	Complexe de Cayley	22
1	Racks	22
	A Description des cellules	22
	B Homologie	24
	C Groupe fondamental	24
2	Quandles	26

Partie 1

Généralités

1 Racks et quandles

A Définitions

Commençons par définir les racks et les quandles.

Définition 1.1 (Rack). Un rack est un ensemble R muni d'une opération \triangleleft vérifiant les deux axiomes suivants :

(R1) Pour tout $b \in R$, l'application $\phi_b : R \rightarrow R$ définie par $a \mapsto a \triangleleft b$ est bijective.

(R2) $\forall a, b, c \in R, (a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$

L'axiome (R1) nous donne une deuxième opération que l'on note \triangleleft^{-1} , définie pour $a, b \in R$ par $a \triangleleft^{-1} b := \phi_b^{-1}(a)$.

Remarque 1.2. Dans la suite, on omettra parfois les parenthèses en notant, pour $a_1, \dots, a_n \in R, a_1 \triangleleft \dots \triangleleft a_n := (\dots (a_1 \triangleleft a_2) \triangleleft \dots) \triangleleft a_n$.

Définition 1.3 (Quandle). Un quandle (Q, \triangleleft) est un rack qui vérifie de plus l'axiome :

(Q0) $\forall a \in Q, a \triangleleft a = a$.

Exemple 1.4 (Quandle diédral). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de l'opération $i \triangleleft j = 2j - i$. Alors :

- Pour tout $i \in \mathbb{Z}_n, i \triangleleft i = 2i - i = i$, donc l'axiome (Q0) est vérifié.
- Soit $j \in \mathbb{Z}_n$. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}_n$, on a $\phi_j(\phi_j(i)) = 2j - \phi_j(i) = 2j - [2j - i] = i$, donc l'axiome (R1) est vérifié.

1. RACKS ET QUANDLES

- Pour tous $i, j, k \in \mathbb{Z}_n$, on a d'une part $(i \triangleleft j) \triangleleft k = 2k - (i \triangleleft j) = 2k - 2j + i$, et d'autre part $(i \triangleleft k) \triangleleft (j \triangleleft k) = 2(j \triangleleft k) - (i \triangleleft k) = 2(2k - j) - (2k - i) = 2k - 2j + i$, donc l'axiome (R2) est vérifié.

Muni de cette opération, \mathbb{Z}_n est appelé le quandle diédral à n éléments.

Exemple 1.5 (Quandle d'Alexander). Soit M un $\mathbb{Z}_n[t^{\pm 1}]$ -module munit de $x \triangleleft y = tx + (1-t)y$, où \mathbb{Z}_n désigne \mathbb{Z} si $n = 0$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sinon. Alors :

- Pour tout $x \in M$, $x \triangleleft x = tx + (1-t)x = x$, donc l'axiome (Q0) est vérifié.
- Soit $y \in M$. Considérons $\psi_y : z \mapsto t^{-1}z + (1-t^{-1})y$. Alors pour tout $x \in M$, on a $\psi_y(\phi_y(x)) = \psi_y(x \triangleleft y) = \psi_y(tx + (1-t)y) = t^{-1}(tx + (1-t)y) + (1-t^{-1})y = x$, donc l'axiome (R1) est vérifié.
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$, on a d'une part $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (tx + (1-t)y) \triangleleft z = t^2x + (1-t)ty + (1-t)z$, et d'autre part $(x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z) = t(tx + (1-t)z) + (1-t)(ty + (1-t)z) = t^2x + (1-t)ty + (1-t)z$, donc l'axiome (R2) est vérifié.

Remarque 1.6. Un quandle diédral $(\mathbb{Z}_n, \triangleleft)$ est en fait un quandle d'Alexander pour $t = -1$ dans \mathbb{Z}_n .

Exemple 1.7 (Quandle de conjugaison). Considérons un groupe G muni de l'opération $a \triangleleft b = b^{-1}ab$. Alors :

- Pour tout $a \in G$, $a \triangleleft a = a^{-1}aa = a$, donc l'axiome (Q0) est vérifié.
- Soit $b \in G$. Alors pour tout $a \in G$, on a $a \triangleleft b \triangleleft b^{-1} = a$, donc $\phi_b \circ \phi_{b^{-1}} = \text{id} = \phi_{b^{-1}} \circ \phi_b$ donc l'axiome (R1) est vérifié.
- Pour tous $a, b, c \in G$, on a d'une part $(a \triangleleft b) \triangleleft c = c^{-1}(a \triangleleft b)c = (bc)^{-1}a(bc)$, et d'autre part $(a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) = (b \triangleleft c)^{-1}(a \triangleleft c)(b \triangleleft c) = (c^{-1}bc)^{-1}(c^{-1}ac)(c^{-1}bc) = c^{-1}b^{-1}cc^{-1}acc^{-1}bc = (bc)^{-1}a(bc)$, donc l'axiome (R2) est vérifié.

Muni de cette opération, G est appelé un quandle de conjugaison.

Définition 1.8 (Morphisme). Soit X, Y deux racks. Un morphisme de racks entre X et Y est une application $f : X \rightarrow Y$ vérifiant

$$\forall a, b \in X, \quad f(a \triangleleft b) = f(a) \triangleleft f(b).$$

B Coloriages de diagrammes

L'étude des quandles est motivée par la recherche d'invariants en théorie des nœuds. Définissons plus précisément le contexte.

Un peu de théorie des nœuds

Définition 1.9. Un nœud (orienté) est l'image d'un plongement (orienté) du cercle \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 . Un entrelac est l'image d'un plongement d'une réunion disjointe d'un nombre fini de cercles dans \mathbb{R}^3 .

Les résultats que l'on donnera étant vrais pour les nœuds et les entrelacs, on les énoncera uniquement pour les nœuds.

Définition 1.10. Une isotopie (ambiante) entre deux nœuds K et K' dans \mathbb{R}^3 est une application continue

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = h_t(x) \end{aligned}$$

telle que :

- $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $h_1(K) = K'$
- pour tout $t \in [0, 1]$, h_t est un difféomorphisme.

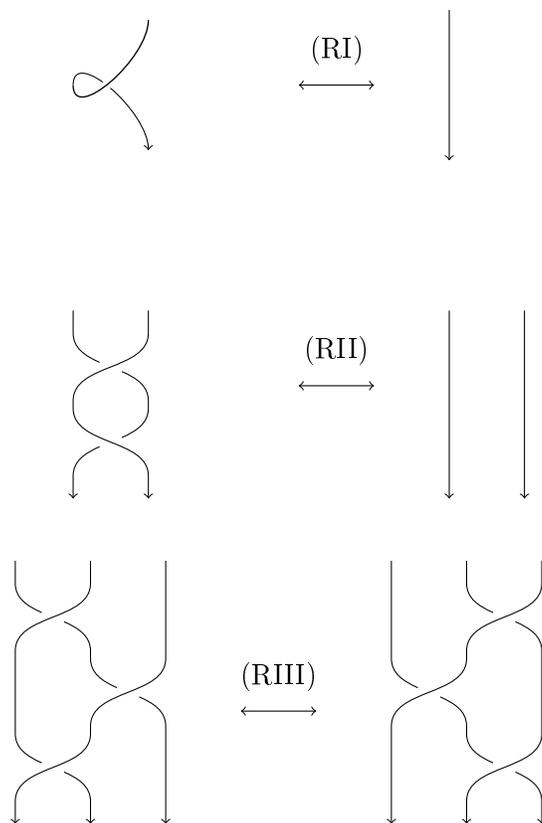
Si les nœuds sont orientés, on demande de plus que h_1 respecte les orientations. On dit que deux nœuds K et K' sont équivalents (ou isotopes) lorsqu'il existe une isotopie entre eux.

A priori, l'étude des nœuds est une étude de courbes dans l'espace \mathbb{R}^3 . Cependant, on peut projeter ces courbes dans \mathbb{R}^2 en indiquant à chaque croisement la position relative (dessus/dessous) d'un brin par rapport à l'autre.

Définition 1.11. On appelle diagramme de nœud une projection régulière d'un nœud dans \mathbb{R}^2 , c'est à dire qui possède au plus des points doubles transverses, sur laquelle on indique à chaque croisement la position relative (dessus/dessous) d'un brin par rapport à l'autre.

L'orientation des nœuds sera indiquée sur les diagrammes par une flèche. On dessinera parfois uniquement une région d'un nœud, notamment pour effectuer l'un des trois mouvements de Reidemeister.

1. RACKS ET QUANDLES



Ces trois mouvements vont nous permettre de déterminer si deux nœuds sont équivalents en effectuant des opérations sur des diagrammes qui les représentent :

Théorème 1.12 (Reidemeister). Deux diagrammes représentent des nœuds équivalents si et seulement s'il existe une suite de mouvements de Reidemeister qui permette de passer d'un diagramme à l'autre à isotopie plane près.

Un objectif en théorie des nœuds est de créer des outils permettant de distinguer deux diagrammes qui représentent des nœuds qui ne sont pas équivalents : c'est ce que l'on appelle des invariants.

Définition 1.13. Un invariant de diagrammes est une application de l'ensemble des diagrammes vers un autre ensemble, qui associe le même objet à deux diagrammes qui représentent des nœuds équivalents.

Remarque 1.14. Un invariant peut éventuellement donner le même résultat pour deux diagrammes qui représentent des nœuds qui ne sont pas équivalents.

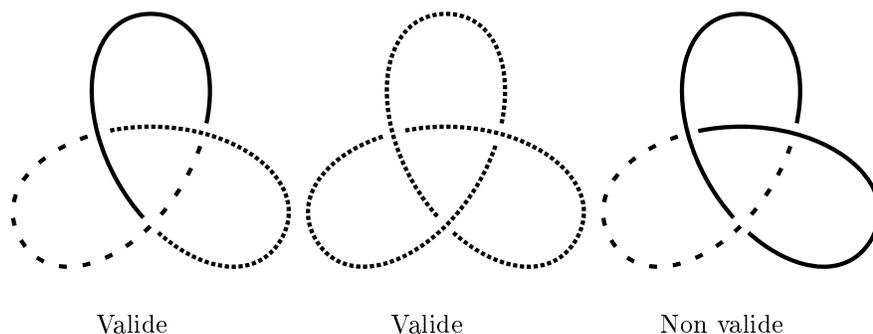
Ainsi, pour vérifier qu'une application est un invariant de diagrammes, il suffit de vérifier qu'elle donne le même résultat avant et après un mouvement de Reidemeister.

Définition 1.15. On appelle arc un morceau d'un brin B d'un diagramme délimité par deux croisements consécutifs en lesquels le brin B passe en dessous.

On va maintenant donner la construction d'un invariant à partir des tricoloriages de Fox, c'est à dire en coloriant les diagrammes par trois couleurs, puis on généralisera en coloriant les diagrammes par les éléments d'un quandle.

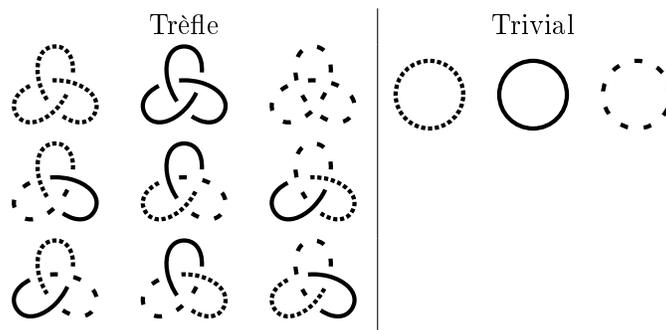
Tricoloriage d'un diagramme de nœud

Définition 1.16. Un tricoloriage d'un diagramme de nœud est le choix d'une couleur dans un ensemble de trois couleurs pour chaque arc du diagramme de manière à ce qu'à chaque croisement, ou bien les trois arcs sont de la même couleur, ou bien ils sont de trois couleurs différentes.



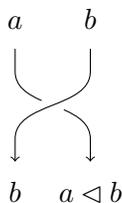
Remarque 1.17. Si l'on part d'un tricoloriage d'un diagramme \mathcal{D} avant d'effectuer un mouvement de Reidemeister, il n'existe qu'un seul tricoloriage du diagramme après le mouvement qui est identique au tricoloriage initial en dehors de la zone à laquelle on a appliqué le mouvement. Le nombre de tricoloriages d'un diagramme nous donne alors un invariant que l'on note Σ_3 .

Exemple 1.18. Il y a neuf tricoloriages pour un diagramme du nœud trèfle alors qu'un diagramme du nœud trivial n'en a que trois. Ceci montre que le nœud trèfle et le nœud trivial ne sont pas équivalents !

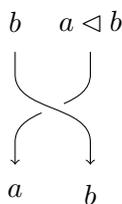


Coloriage par un quandle

On veut maintenant généraliser le tricoloriage en choisissant comme couleurs les éléments d'un quandle fixé. On va s'intéresser aux coloriages de diagrammes orientés, qui définit les notions de croisements positifs et négatifs (voir les deux figures ci-dessous). Comme pour le coloriage par trois couleurs, le nombre de coloriages d'un diagramme par un quandle X est un invariant. Voyons les règles à imposer à chaque croisement. Lorsque le croisement est positif avec comme couleurs de départ respectivement a et b , on impose la règle de coloriage suivante ($a, b \in X$) :

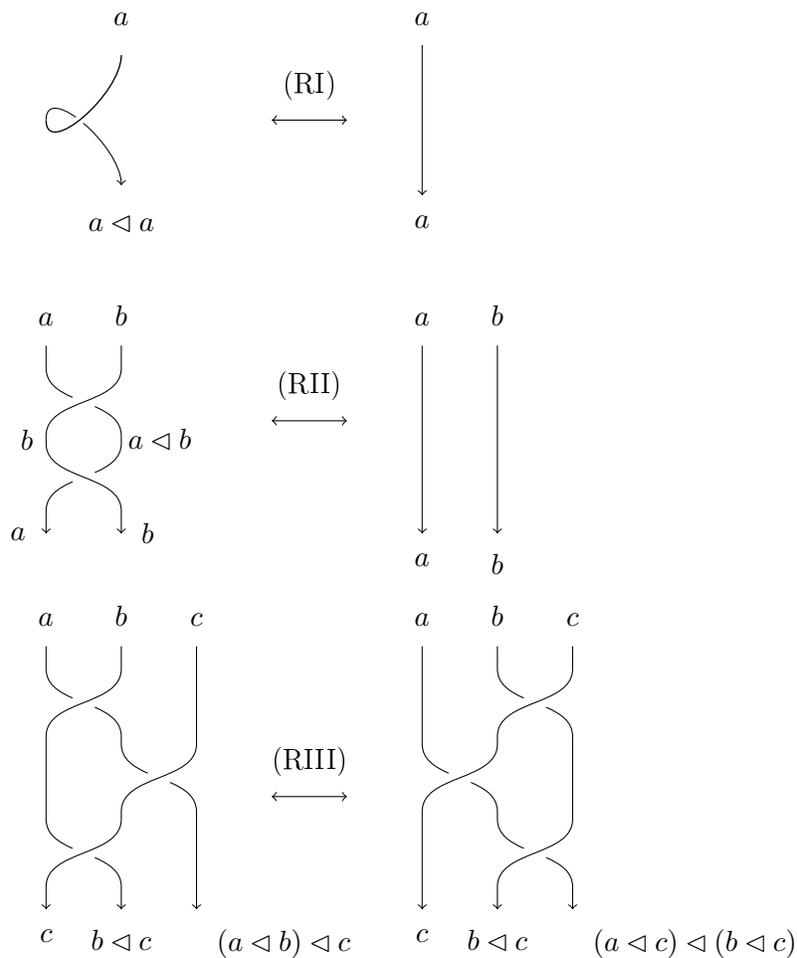


Lorsque le croisement est négatif avec comme couleurs de départ respectivement b et $a < b$, on impose l'autre règle suivante :



1. RACKS ET QUANDLES

On voit alors que les axiomes de quandle (Q0), (R1) et (R2) traduisent respectivement les mouvements de Reidemeister (RI), (RII) et (RIII) pour les diagrammes coloriés :



On définit alors l'invariant $\Sigma_X(\mathcal{D})$ comme le nombre de coloriages par le quandle X d'un diagramme orienté \mathcal{D} .

Remarque 1.19. Un tricoloriage d'un diagramme \mathcal{D} est un coloriage de \mathcal{D} par le quandle diédral \mathbb{Z}_3 .

C Groupes associés à un rack et leurs actions

Étant donné un rack R , on peut construire des groupes qui lui sont associés. Considérons dans un premier temps le groupe suivant, qui est un sous-groupe

du groupe symétrique sur R :

$$\text{Inn}(R) := \left\langle \begin{array}{ccc} \phi_b : R & \longrightarrow & R \\ a & \longmapsto & a \triangleleft b \end{array}, b \in R \right\rangle \subset S_R.$$

On a vu que pour tout $c \in R$, ϕ_c est une bijection. Mais on peut aussi vérifier que

$$\phi_c(a \triangleleft b) = (a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) = \phi_c(a) \triangleleft \phi_c(b).$$

Les ϕ_c sont alors des morphismes de racks bijectifs, ce qui motive l'appellation d'automorphismes intérieurs.

Définition 1.20. Soit R un rack. Le groupe $\text{Inn}(R)$ est appelé groupe des automorphismes intérieurs de R .

Remarque 1.21. Soit R un rack. Alors $\text{Inn}(R)$ agit à droite sur R par $a \cdot \phi_b = a \triangleleft b$.

Définition 1.22 (Groupe associé). Soit R un rack. On appelle groupe associé à R le groupe

$$G_R = \langle e_a, a \in R \mid \forall a, b \in R, e_a e_b = e_b e_{a \triangleleft b} \rangle.$$

Remarque 1.23. Le groupe G_R agit naturellement à droite sur R par $a \cdot e_b = a \triangleleft b$.

Si $\text{ord } \phi_a$ désigne l'ordre de ϕ_a dans $\text{Inn}(R)$, alors on note

$$n(a) = \begin{cases} \text{ord } \phi_a & \text{si } \text{ord } \phi_a < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il apparait alors un sous-groupe de G_R , noté Z_R , engendré par $\{e_a^{n(a)}, a \in R\}$. Ce groupe est un groupe abélien libre [3].

Proposition 1.24. Si R est un rack fini, alors le groupe quotient $\overline{G}_R = G_R/Z_R$ est fini. On l'appelle quotient à la Coxeter de G_R .

Remarque 1.25. Ce groupe quotient joue un rôle important, notamment dans la compréhension de l'homologie de rack : même lorsque R est fini, le groupe G_R est infini alors que \overline{G}_R est fini. On pourra exprimer $H_2^R(R)$ dans \overline{G}_R alors qu'on le voyait a priori dans G_R !

Remarque 1.26. Soit R un rack. Alors \overline{G}_R agit à droite sur R par $a \cdot \overline{e}_b = a \triangleleft b$.

1. RACKS ET QUANDLES

On va maintenant relier les trois groupes que l'on vient de définir. Par construction, on a un morphisme surjectif $G_R \twoheadrightarrow \overline{G}_R$. On a également un morphisme surjectif $G_R \twoheadrightarrow \text{Inn}(R)$, $e_a \mapsto \phi_a$. En fait, \overline{G}_R joue un rôle intermédiaire entre G_R et $\text{Inn}(R)$, puisqu'on a même :

$$\begin{array}{ccccc} G_R & \twoheadrightarrow & \overline{G}_R & \twoheadrightarrow & \text{Inn}(R) \\ e_a & \mapsto & \overline{e}_a & \mapsto & \phi_a \end{array}$$

Remarque 1.27. Soit R un rack. Alors les actions de \overline{G}_R et G_R sur R sont induites par l'action de $\text{Inn}(R)$ via les morphismes surjectifs décrits ci-dessus. En particulier, les actions de G_R , \overline{G}_R et $\text{Inn}(R)$ sur R ont les mêmes orbites.

On définira dans la partie 2 un analogue des graphes de Cayley pour les racks sous la forme de CW-complexes, dont les composantes connexes sont en bijection avec les orbites des actions définies ci-dessus. Ceci motive à poser l'appellation suivante pour le cas le plus simple.

Lemme 1.28. Soit R un rack. Alors

- Z_R est un sous-groupe central de G_R
- $\forall x \in R, g \in G_R, e_x^{n(x)} = e_{x \cdot g}^{n(x)} \in Z_R$
- $\forall x \in R, g \in G_R, n(x) = n(x \cdot g)$
- Z_R agit trivialement sur R

Démonstration. Soit $x, y \in R$. Alors d'une part,

$$e_y^{-1} e_x^{n(x)} e_y = e_x e_{y \triangleleft x}^{-1} e_x^{n(x)-1} e_y = e_x^{n(x)} e_{\phi_x^{n(x)}(y)}^{-1} e_y = e_x^{n(x)}$$

d'où la première assertion.

D'autre part,

$$e_y^{-1} e_x^{n(x)} e_y = e_y^{-1} e_x^{n(x)-1} e_y e_{x \triangleleft y} = e_{x \triangleleft y}^{n(x)},$$

ce qui donne la deuxième assertion.

De plus, puisque $\forall g \in G_R, g^{-1} e_x g = e_{x \cdot g}$, le morphisme de groupes surjectif $G_R \twoheadrightarrow \text{Inn}(R)$ donne

$$\phi_y^{-1} \phi_x \phi_y = \phi_{x \triangleleft y},$$

et donc $n(x \triangleleft y) = n(x)$. On obtient la troisième assertion en itérant cet argument.

On a aussi $x \cdot e_y^{n(y)} = x \cdot \phi_y^{n(y)} = x$ car $\phi_y^{n(y)} = \text{id}$. □

On admet le résultat suivant sur Z_R .

Proposition 1.29 ([3]). Soit R un rack. Alors Z_R est un groupe abélien libre. Son rang est égal au nombre d'orbites de l'action de $\text{Inn}(R)$ sur R .

Un cas simple de racks sont les racks à une seule orbite que l'on dit connexes.

Définition 1.30. On dit qu'un rack R est connexe si l'action de G_R sur R est transitive.

Définissons le morphisme degré d'un rack

Définition 1.31. Soit X un rack. On appelle morphisme degré le morphisme de groupes défini sur les générateurs de G_X de la façon suivante :

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} G_X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ e_x & \longmapsto & 1 \end{array} .$$

Un tel morphisme existe bien : G_X est défini par des relations homogènes et \mathbb{Z} est commutatif.

Exemple 1.32. Pour n un entier naturel, notons $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculons les groupes associés au quandle diédral \mathbb{Z}_n pour n un nombre premier impair. Commençons par montrer que \mathbb{Z}_n est connexe. Soient $i, k \in \mathbb{Z}_n$ et montrons qu'il existe $j \in \mathbb{Z}_n$ tel que $i \triangleleft j = 2j - i = k$, c'est à dire tel que $2j = i + k$. Puisque n est impair, $\text{pgcd}(2, n) = 1$ et donc 2 est inversible dans \mathbb{Z}_n . Ainsi, \mathbb{Z}_n est connexe.

Montrons que $\text{Inn}(\mathbb{Z}_n) \cong D_{2n}$ le groupe diédral à $2n$ éléments. D_{2n} est le groupe des isométries du plan qui conservent globalement un n -gone régulier. Une telle isométrie induit une permutation des sommets, et est entièrement déterminée par cette permutation. Numérotons maintenant les sommets par les éléments de \mathbb{Z}_n de la manière suivante : on choisit un sommet que l'on numérote par 0, puis ajoute 1 pour le sommet suivant dans le sens trigonométrique et ainsi de suite. Si on note \tilde{i}, \tilde{j} les représentants canoniques respectifs de $i, j \in \mathbb{Z}_n$, alors on appelle distance de j à i le nombre $\tilde{j} - \tilde{i}$. Soit $j \in \mathbb{Z}_n$ et notons r_j la réflexion du n -gone d'axe passant par j . Notons \mathcal{S} l'ensemble des sommets du n -gone. Si $i \in \mathbb{Z}_n$, alors $r_{j|\mathcal{S}}(i) = j + [\tilde{j} - \tilde{i} \pmod n] = 2j - i = i \triangleleft j = \phi_j(i)$. Or les réflexions engendrent D_{2n} et sont les générateurs de $\text{Inn}(\mathbb{Z}_n)$, donc $\text{Inn}(\mathbb{Z}_n) \cong D_{2n}$.

On connaît la présentation de $G_{\mathbb{Z}_n}$:

$$G_{\mathbb{Z}_n} = \langle e_i, i \in \mathbb{Z}_n \mid e_i e_j = e_j e_{i \triangleleft j} \rangle .$$

On cherche à comprendre les orbites de l'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{Z}_n^2 définie par $1 \cdot (i, j) = (j, i \triangleleft j)$, qui vient des relations qui définissent $G_{\mathbb{Z}_n}$. Remarquons

1. RACKS ET QUANDLES

que la différence entre les deux composantes (que nous appellerons différence dans la suite) est conservée par cette action : $j - i = (2j - i) - j = i \triangleleft j - j$. Comptons le nombre d'éléments du type $e_i e_j$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$. Notons $d := j - i$ la différence. Si $d = 0$, alors $i = j$ et donc $e_i^2 = e_0^2$ puisque \mathbb{Z}_n est connexe. Il y a donc un seul élément du type e_i^2 avec $i \in \mathbb{Z}_n$. Autrement dit, dans cet exemple $Z_{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que $i \neq j$. Alors pour passer du produit $e_i e_j$ au produit $e_j e_{i \triangleleft j}$, on ajoute d à i . Puisque n est premier, on peut alors répéter ceci n fois avant que le générateur de gauche soit à nouveau e_i . Au cours de ces n manipulations, l'indice du générateur de gauche parcourt tous les éléments de \mathbb{Z}_n , donc si on fixe $a \in \mathbb{Z}_n$, alors pour tous $i \neq j \in \mathbb{Z}_n$, il existe $b \in \mathbb{Z}_n$ tel que $e_i e_j = e_a e_b$. On peut alors choisir $a = 0$ et exprimer tous les produits $e_i e_j$ sous la forme $e_0 e_b$. En faisant parcourir $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ à b , on voit qu'il y a au plus $n - 1$ produits non triviaux de deux générateurs.

Montrons que les produits de trois générateurs peuvent s'exprimer en fonction d'un seul générateur et du carré de e_0 . Soient $i, j, k \in \mathbb{Z}_n$. Alors d'après ce qui précède,

$$e_i e_j e_k = \underbrace{e_i e_j}_{e_0 e_b} e_k = e_0 \underbrace{e_b e_k}_{e_0 e_c} = e_0^2 e_c.$$

On a alors par récurrence qu'un produit de m générateurs s'exprime sous la forme $e_0^{m-1} e_l$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}_n$.

Il reste à voir le cas où un inverse d'un générateur apparaît dans un produit. Mais pour $i \in \mathbb{Z}_n$, on a

$$e_i^{-1} = e_i^{-1} e_i^{-1} e_i = e_i^{-2} e_i = e_0^{-2} e_i,$$

et donc quitte à multiplier par e_0^{-2} qui est central dans $G_{\mathbb{Z}_n}$, on se ramène au cas d'un produit de générateurs.

On conclut alors que les seuls éléments non triviaux de $G_{\mathbb{Z}_n}$ sont de la forme $e_0^m e_i$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{Z}_n$.

Passons au quotient à la Coxeter

$$\overline{G}_{\mathbb{Z}_n} = G_{\mathbb{Z}_n} / Z_{\mathbb{Z}_n}$$

Les éléments non triviaux de $\overline{G}_{\mathbb{Z}_n}$ sont alors de la forme $\overline{e_i}$ avec $i \in \mathbb{Z}_n$ ou $\overline{e_0 e_i}$ avec $i \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. En parcourant les $i \in \mathbb{Z}_n$, on voit qu'il y a au plus n éléments du type $\overline{e_i}$. En parcourant les $i \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, on voit qu'il y a au plus $n - 1$ du type $\overline{e_0 e_i}$ avec $i \neq 0$. Ainsi, en comptant l'élément neutre, on obtient que $\overline{G}_{\mathbb{Z}_n}$ est de cardinal au plus $2n$. Or on a construit un morphisme surjectif $\overline{G}_{\mathbb{Z}_n} \rightarrow \text{Inn}(\mathbb{Z}_n) \cong D_{2n}$. De ce morphisme, on obtient d'abord que $\overline{G}_{\mathbb{Z}_n}$ est

de cardinal $2n$, et donc par égalité des cardinaux, le morphisme surjectif est en fait bijectif. Finalement, $\overline{G}_{\mathbb{Z}_n} \cong D_{2n}$.

2 Homologie

A Motivation

Quandles et nœuds

Soit X un quandle. On a construit précédemment un invariant de nœuds, le nombre $\Sigma_X(\mathcal{D})$ des coloriages d'un diagramme \mathcal{D} par X . Cependant, cet invariant n'est pas satisfaisant : les ensembles des coloriages d'un diagramme avant et après un mouvement de Reidemeister sont en bijection, et on tire de cette bijection seulement le nombre de coloriages.

On veut alors définir un invariant plus fort. On cherche à pondérer les croisements, de sorte que le nombre de coloriages avec le même poids total soit invariant. Pour cela, considérons une fonction $\phi : X \times X \rightarrow A$, avec A un groupe abélien, de sorte que chaque croisement contribue pour un poids $\pm\phi(a, b)$ précisé sur la figure 1.2, avec $\phi(a, b)$ dépendant du coloriage.

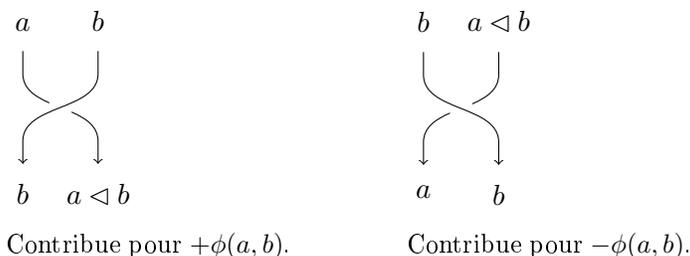
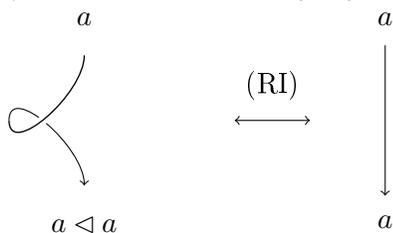


FIGURE 1.2 – Contribution des croisements au poids total.

Voyons quelles conditions ϕ doit vérifier pour donner la même valeur avant et après un mouvement de Reidemeister.

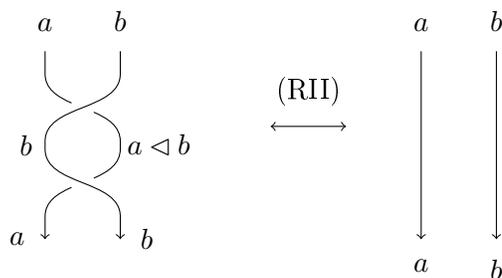
Le mouvement (RI) donne la condition $\phi(a, a) = 0$ pour tout $a \in X$.



2. HOMOLOGIE

Le mouvement (RII) ne donne pas de condition au vu du coloriage :

$$\phi(a, b) - \phi(a, b) = 0.$$

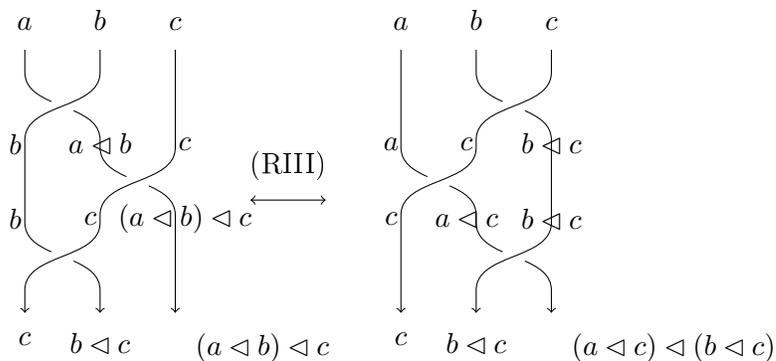


Enfin, le mouvement (RIII) donne

$$\phi(a, b) + \phi(a \triangleleft b, c) + \phi(b, c) = \phi(b, c) + \phi(a, c) + \phi(a \triangleleft c, b \triangleleft c),$$

ou en simplifiant

$$\phi(a, b) + \phi(a \triangleleft b, c) = \phi(a, c) + \phi(a \triangleleft c, b \triangleleft c).$$



Il se trouve que c'est une relation de 2-cocycle. On va donc partir d'un 2-cocycle pour définir l'invariant que l'on cherchait.

Donnons nous un quandle X , un diagramme \mathcal{D} et un 2-cocycle ϕ à valeurs dans un groupe abélien A . Pour chaque coloriage \mathcal{C} du diagramme par X , on obtient un élément $\Phi(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ de A qui est la somme des poids (avec des signes) de tous les croisements colorés du diagramme. Puisqu'on a une bijection entre les coloriages avant et après un mouvement de Reidemeister qui respecte les poids, le multiensemble d'éléments de A

$$\{\{\Phi(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \in A \mid \mathcal{C} \in Col(\mathcal{D}, X)\}\}$$

2. HOMOLOGIE

est un invariant ! On peut aussi voir cet invariant sous la forme d'un polynôme formel :

$$\sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}(\mathcal{D}, X)} t^{\Phi(\mathcal{D}, \mathcal{C})}.$$

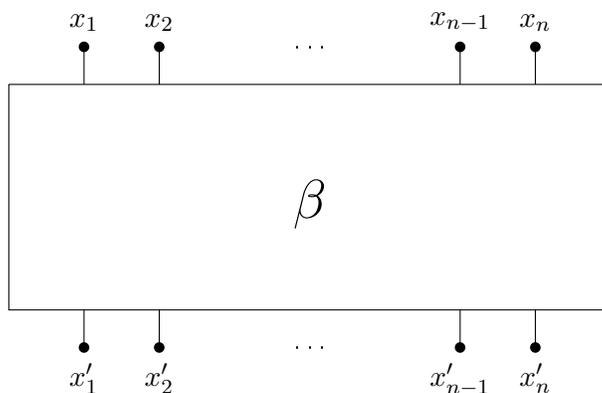
Considérons maintenant deux 2-cocycles ϕ et ψ tels qu'il existe une application f vérifiant $(\phi - \psi)(a, b) = \phi(a, b) - \psi(a, b) = f(a) - f(a \triangleleft b)$. Cette condition traduit le fait que $\phi - \psi$ soit un cobord. Fixons un diagramme \mathcal{D} et un coloriage \mathcal{C} et montrons que les invariants obtenus à partir de ϕ et ψ sont les mêmes. Etant donné un arc du diagramme colorié, la couleur de cet arc est une fois la couleur de départ et une fois la couleur d'arrivée d'un croisement. Ainsi, si k arcs du diagramme sont coloriés par c , $f(c)$ apparaît dans $(\Phi - \Psi)(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ k fois avec un signe positif et k fois avec un signe négatif. En appliquant cet argument pour chaque couleur, on a donc $(\Phi - \Psi)(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = 0$. Finalement, les deux 2-cocycles donnent bien le même invariant. Cela motive l'introduction d'une homologie, avec pour objectif le calcul du deuxième groupe d'homologie.

Remarque 2.1. La construction d'invariants de plongements de applications de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R}^{n+2} à partir de $(n+1)$ -cocycles de quandles n'est pas propre au cas $n = 1$. Par exemple, on peut construire des invariants de surfaces nouées à partir de 3-cocycles de quandles.

Racks et tresses

On peut colorier de manière similaire le diagramme d'une tresse par un rack X . Si B_n désigne le groupe des tresses à n brins, un coloriage d'un diagramme de tresse par un rack définit une permutation qui est l'image d'une tresse $\beta \in B_n$ par un morphisme de groupes $\theta : B_n \rightarrow S_{X^n}$, où S_{X^n} est le groupe des bijections de X^n dans lui-même. En effet, le coloriage d'une tresse par X est entièrement déterminé par les couleurs choisies au départ et les croisements du diagramme. Pour $\beta \in B_n$ une tresse à n brins, si (x_1, \dots, x_n) sont les couleurs de départ, ordonnées par l'ordre de départ des brins, alors $\theta(\beta)(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ sont les couleurs à l'arrivée, ordonnées par l'ordre d'arrivée des brins. On peut aussi voir ce morphisme comme une action du groupe de tresse B_n sur X^n .

2. HOMOLOGIE



On peut alors créer un invariant de manière analogue au cas des quandles et des diagrammes de nœuds à partir d'un 2-cocycle de rack.

B Homologie de rack

Soit X un rack.

Considérons le complexe $C_\star^R(X)$, où $C_n^R(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ avec $x_i \in X$. Les différentielles sont définies comme suit :

$$\partial_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right].$$

On peut vérifier que $\partial \circ \partial = 0$. On le fera dans la section suivante en utilisant l'homologie d'un CW-complexe.

On définit alors les groupes d'homologie de rack de X :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n^R(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$$

C Homologie de quandle

Soit X un quandle.

Considérons maintenant le sous-complexe $C_\star^D(X)$ de $C_\star^R(X)$, où $C_\star^D(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tels qu'il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ vérifiant $x_k = x_{k+1}$. Vérifions que $C_\star^D(X)$ est un sous-complexe : pour $(x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n) \in C_n^D(X)$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_n(x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i [(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n)] \\
&\quad + (-1)^k [(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1, \dots, x_{k-1} \triangleleft x_k, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n)] \\
&\quad + (-1)^{k+1} [(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1, \dots, x_{k-1} \triangleleft x_k, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n)] \\
&\quad + \sum_{i=k+2}^n (-1)^i [(x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_k \triangleleft x_i, x_k \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i [(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_k, \dots, x_n)] \\
&\quad + \sum_{i=k+2}^n (-1)^i [(x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&\quad - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_k \triangleleft x_i, x_k \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)] \\
&\in C_{n-1}^D(X)
\end{aligned}$$

On note alors $C_\star^Q(X)$ le complexe quotient $C_\star^R(X)/C_\star^D(X)$ munit des différentielles que l'on note ∂_n^Q . On définit alors les groupes d'homologie de quandle de X :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n^Q(X) = \ker \partial_n^Q / \text{im } \partial_{n+1}^Q$$

Remarque 2.2. Il est difficile en général de décrire $H_n(X)$ à partir de ces définitions. C'est cette difficulté qui motive l'introduction de CW-complexe pour tenter de calculer l'homologie comme une homologie cellulaire !

3 CW-complexe associé à un rack

Soit X un rack. On va associer un CW-complexe $C(X, \triangleleft)$ à X qui vérifiera $\pi_1(X, \bullet) = G_X$.

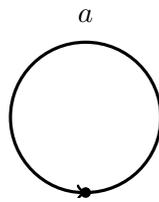
A Description des cellules

0-squelette

On prend une seule 0-cellule \bullet .

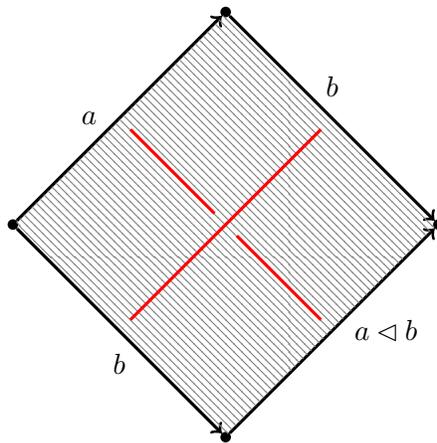
1-squelette

Pour chaque $a \in X$, on ajoute une 1-cellule dont on colle les extrémités sur \bullet .



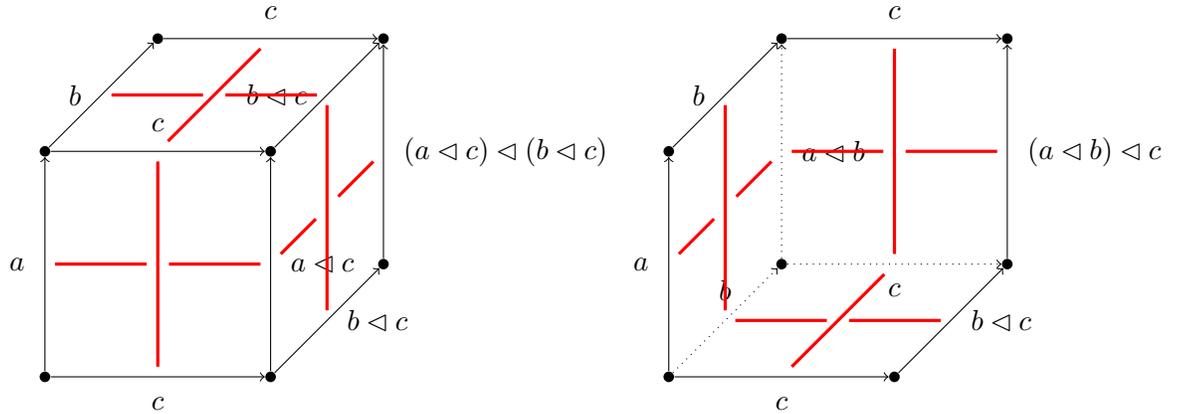
2-squelette

Pour tous $(a, b) \in X^2$, on colle une 2-cellule positive de la façon suivante :



3-squelette

Pour tous $(a, b, c) \in X^3$, on colle une 3-cellule de la façon suivante :



B Homologie

Calculons les différentielles du complexe cellulaire que l'on vient de construire, en les notant d_n . On va remarquer que l'on retrouve les différentielles qui définissent l'homologie de rack !

$$d_1(a) = \bullet - \bullet = 0$$

$$d_2(a, b) = b + a \triangleleft b - b - a = a \triangleleft b - a = \partial_2(a, b)$$

$$d_3(a, b, c) = (a, c) + (b, c) + (a \triangleleft c, b \triangleleft c) - (a, b) - (b, c) - (a \triangleleft b, c) = \partial_3(a, b, c).$$

Par construction de l'homologie cellulaire, on a bien $d \circ d = \partial \circ \partial = 0$ comme annoncé dans la section précédente.

Ainsi, on a

$$H_1^R(X) = H_1(C(X, \triangleleft))$$

et

$$H_2^R(X) = H_2(C(X, \triangleleft))$$

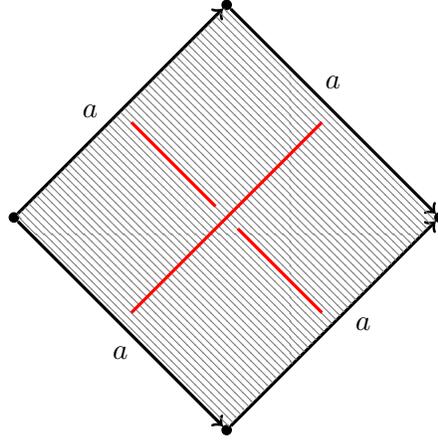
C Homotopie

Soit X un rack. Calculons le groupe fondamental de ce CW-complexe qui est connexe. Le groupe fondamental du 1-squelette est le groupe libre engendré par les $e_a, a \in X$. Maintenant, pour chaque 2-cellule (a, b) , on va ajouter la relation $e_a e_b e_{a \triangleleft b}^{-1} e_b^{-1}$ donnée par la forme de la cellule. On a alors comme annoncé :

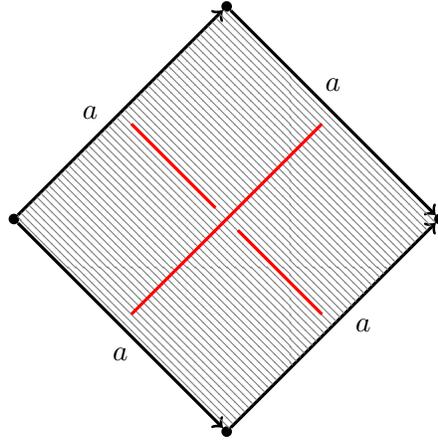
$$\pi_1(C(X, \triangleleft), \bullet) \cong G_X.$$

Considérons maintenant un quandle X . Le CW-complexe associé est le CW-complexe associé à X en tant que rack sur lequel on a collé des 2-cellules de la forme suivante :

3. CW-COMPLEXE ASSOCIÉ À UN RACK



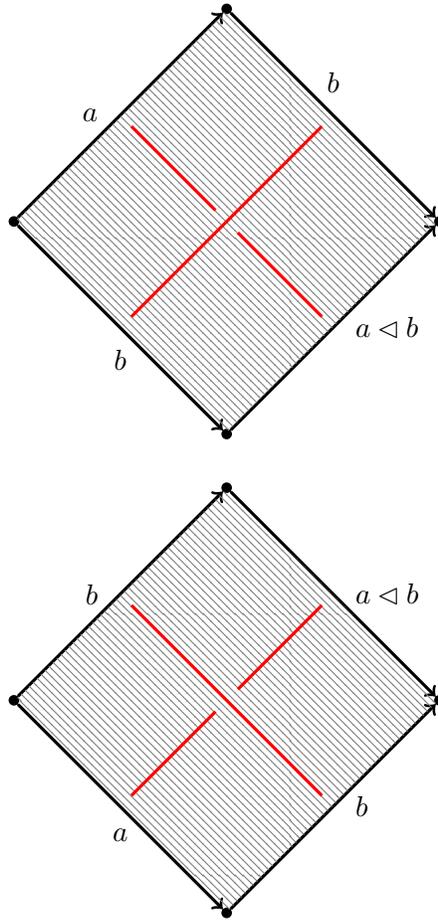
On cherche à calculer le deuxième groupe d'homotopie $\pi_2(C(X, \triangleleft), \bullet)$. Considérons une application $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow C(X, \triangleleft)$ et voyons quelles déformations d'homotopie on peut effectuer sur f . On peut toujours pousser f dans le 2-squelette, et effectuer les déformations d'homotopie dans le 3-squelette. Cela nous donne un découpage de \mathbb{S}^2 par les 2-cellules de $C(X, \triangleleft)$, qui correspond à un diagramme d'entrelac coloré par X , représenté par les flèches rouges. La première déformation que l'on peut effectuer est d'ajouter ou supprimer une 2-cellule de la forme



Cette opération revient à effectuer un mouvement de Reidemeister (RI) sur le diagramme correspondant.

La deuxième déformation possible est de pincer et aplatir une partie de la sphère en collant les deux cellules suivantes :

3. CW-COMPLEXE ASSOCIÉ À UN RACK



Enfin, la troisième déformation possible est de changer trois 2-cellules par les trois autres qui définissent une 3-cellule de $C(X, \triangleleft)$. Cette dernière déformation correspond à appliquer le mouvement (RIII) au diagramme coloré. Ainsi, les classes d'homotopies d'applications $\mathbb{S}^2 \rightarrow C(X, \triangleleft)$ sont en bijection avec les classes de diagrammes coloriés par X sous les mouvements de Reidemeister.

Partie 2

Complexe de Cayley

On va construire $\text{Cayl}(X)$, un analogue des graphes de Cayley pour les racks et les quandles sous la forme d'un CW-complexe, qui est un revêtement de $C(X, \triangleleft)$. On verra que l'homologie du complexe de Cayley d'un rack X et l'homologie de X sont les mêmes à un décalage d'indice près, et de même en considérant l'homologie de quandle en prenant le complexe de Cayley correspondant.

1 Racks

Soit (X, \triangleleft) un rack.

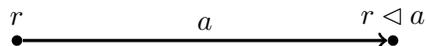
A Description des cellules

0-squelette

Pour chaque $r \in X$, on considère une 0-cellule $\overset{r}{\bullet}$ que l'on identifiera avec r .

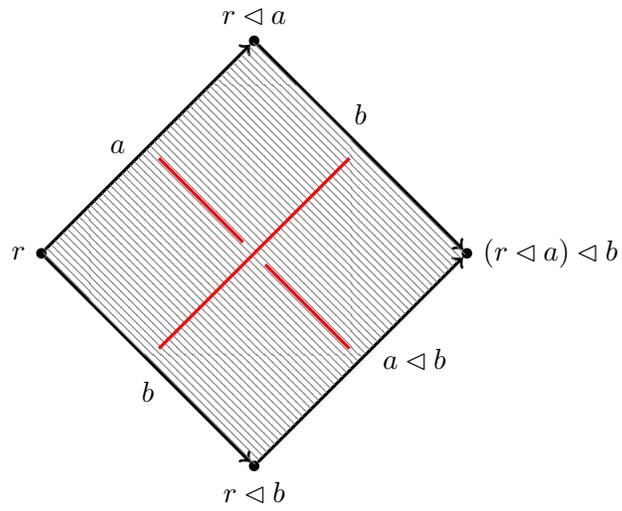
1-squelette

Pour tous $(r, a) \in X^2$, on colle les extrémités d'une 1-cellule respectivement sur r et $r \triangleleft a$.



2-squelette

Pour tous $(r, a, b) \in X^3$, on colle une 2-cellule, de la manière suivante :



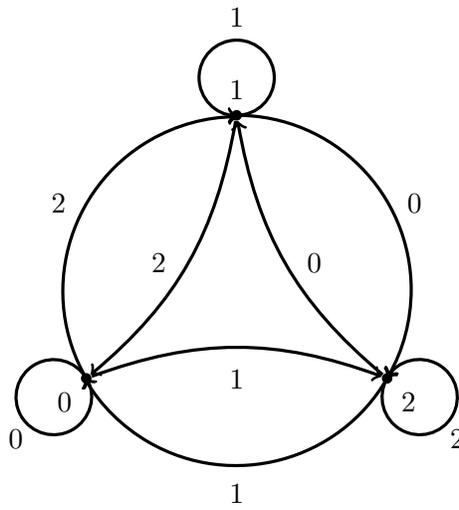
On a alors une description des composantes connexes de $\text{Cayl}(X)$.

Proposition 1.1. Soit X un rack, et notons \mathcal{O} l'ensemble des orbites de X sous l'action de G_X . Alors $\pi_0(\text{Cayl}(X))$ est en bijection avec \mathcal{O} .

Ainsi, si $\alpha \in \mathcal{O}$, on notera $\text{Cayl}(X)_\alpha$ la composante connexe correspondante.

Remarque 1.2. $\text{Cayl}^R(X)$ est un revêtement de $C(X, \triangleleft)$.

Exemple 1.3. Dans le cas du quandle diédral $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le 1-squelette a la forme suivante :



B Homologie

Notons δ les différentielles de ce nouveau CW-complexe. Alors

$$\delta_1(r, a) = r \triangleleft a - a = \partial_2(r, a)$$

$$\delta_2(r, a, b) = (r, b) + (r \triangleleft b, a \triangleleft b) - (r \triangleleft a, b) - (r, a) = \partial_3(r, a, b)$$

Ainsi, on a

$$H_1(\text{Cayl}^R(X)) \cong H_2(C(X, \triangleleft)) \cong H_2^R(X)$$

que l'on cherchait à calculer. Rappelons que pour un CW-complexe connexe M et $m \in M$, on a

$$H_1(M) \cong [\pi_1(M, m)]_{Ab}.$$

Dans la suite, on va donc calculer le groupe fondamental de $\text{Cayl}^R(X)$.

C Groupe fondamental

Proposition 1.4. Soit X un rack et $x_0 \in X$. Alors

$$\pi_1(\text{Cayl}^R(X), x_0) \cong \text{Stab}_{G_X}(x_0).$$

Démonstration. Au vu de la construction de $\text{Cayl}^R(X)$, on peut parcourir la 1-cellule (r, a) dans le sens positif ou dans le sens négatif (le sens étant défini par l'orientation de la cellule). Soit $g = e_{a_1}^{\varepsilon_1} \dots e_{a_k}^{\varepsilon_k} \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$, avec $a_i \in X$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. On associe à $e_{a_1}^{\varepsilon_1}$ le parcours de l'arc (x_0, a_1) dans le sens positif si $\varepsilon_1 = 1$, et le parcours de l'arc $(x_0 \triangleleft^{-1} a_1, a_1)$ dans le sens négatif si $\varepsilon_1 = -1$. Voici à gauche la partie du graphe que l'on a considérée, et à droite les chemins qui correspondent à $e_{a_1}^{\varepsilon_1}$:



On procède de la même manière pour les $e_{a_i}^{\varepsilon_i}$ en prenant $x_0 \triangleleft^{\varepsilon_1} a_1 \triangleleft \dots \triangleleft^{\varepsilon_{i-1}} a_{i-1}$ comme point de départ. Puisque $g \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$, le chemin ainsi construit est bien un lacet. On a fait un choix de mots en termes des générateurs pour l'écriture de g . Vérifions que pour une écriture de g avec un autre mot $g = e_{b_1}^{\beta_1} \dots e_{b_n}^{\beta_n} \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ avec $\beta_i \in \{\pm 1\}$, on construit bien un lacet homotope à celui obtenu avec la première écriture.

On connaît la présentation par générateurs et relations de G_X : toutes les relations sont du type $e_x e_y = e_y e_{x \triangleleft y}$. Ainsi, pour passer d'un mot représentant g à l'autre, on applique successivement des relations de ce type (ou leurs

1. RACKS

inverses). Or par construction des 2-cellules de $\text{Cayl}^R(X)$, les lacets associés aux expressions du type $e_x e_y e_{x \triangleleft y}^{-1} e_y^{-1}$ sont homotopes au lacet trivial.

Par construction, les lacets indexés par $h_1 e_x^\varepsilon e_x^{-\varepsilon} h_2$ et $h_1 h_2$, avec $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $(h_1, h_2) \in G_X^2$ et $x \in X$, sont homotopes : on peut donc supposer avoir réduit les mots de ce type.

Ainsi, les lacets correspondants aux deux mots représentant g sont homotopes, et donc on a défini une application

$$\text{Stab}_{G_X}(x_0) \longrightarrow \pi_1(\text{Cayl}^R(X), x_0)$$

qui est clairement un morphisme de groupes.

Considérons maintenant l'application qui à un lacet associe un élément $g \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ en suivant les arêtes du graphe. On sait que le groupe fondamental d'un CW-complexe est celui de son 2-squelette, ce qui veut dire que les seules déformations possibles d'un lacet se passent dans le 2-squelette, dont on connaît les cellules. Lorsque l'on procède à une déformation du lacet de départ en lui faisant emprunter par moments les deux autres 1-cellules qui bordent les 2-cellules, on associe la multiplication de g par des produits d'éléments du type $m = e_a e_b e_{a \triangleleft b}^{-1} e_b^{-1}$. Or par construction, m est trivial dans G_X . Ainsi, l'application est en fait définie $\pi_1(\text{Cayl}^R(X), x_0) \longrightarrow \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ et est la réciproque de la précédente, d'où l'isomorphisme annoncé. \square

On peut alors démontrer la formule d'Eisermann dans le cas d'un rack quelconque.

Proposition 1.5. Soit X un rack. Notons \mathcal{O} l'ensemble des orbites de X sous l'action de G_X , et $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{O}}$ une famille de représentants des orbites. Alors

$$H_2^R(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}} [\text{Stab}_{G_X}(x_\alpha)]_{Ab}$$

Démonstration. On a vu précédemment que

$$H_2^R(X) \cong H_2(C(X, \triangleleft)) \cong H_1(\text{Cayl}^R(X))$$

Par construction de l'homologie, si les $(\text{Cayl}^R(X)_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{O}}$ désignent les composantes connexes de $\text{Cayl}^R(X)$, on a

$$H_1(\text{Cayl}^R(X)) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}} H_1(\text{Cayl}^R(X)_\alpha).$$

Or pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$, puisque $\text{Cayl}^R(X)$ est un CW-complexe,

$$H_1(\text{Cayl}^R(X)_\alpha) \cong [\pi_1(\text{Cayl}^R(X)_\alpha, x_\alpha)]_{Ab} \cong [\pi_1(\text{Cayl}^R(X), x_\alpha)]_{Ab}.$$

2. QUANDLES

La proposition 1.4 nous donne alors

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}, \pi_1(\text{Cayl}^R(X), x_\alpha) \cong \text{Stab}_{G_X}(x_\alpha).$$

d'où le résultat. □

2 Quandles

On va maintenant montrer le théorème d'Eisermann [1] suivant en utilisant les complexes de Cayley.

Théorème 2.1 (Eisermann). Soit X un quandle. Notons \mathcal{O} l'ensemble des orbites de X sous l'action de G_X , et $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{O}}$ une famille de représentants des orbites. Alors

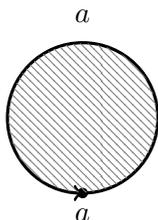
$$H_2^Q(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}} [\text{Stab}_{G_X}(x_\alpha) \cap \ker(\varepsilon)]_{Ab}$$

Rappelons la définition du morphisme degré.

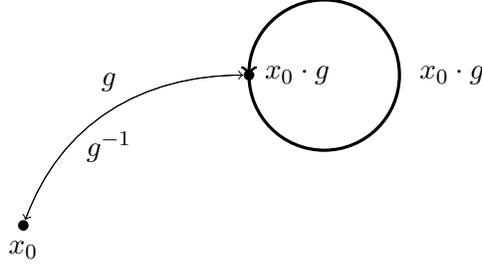
Définition 2.2. Soit X un quandle. On appelle morphisme degré le morphisme de groupes défini sur les générateurs de G_X de la façon suivante :

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} G_X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ e_x & \longmapsto & 1 \end{array} .$$

Pour montrer le théorème, on va modifier le complexe de Cayley. Pour cela, on va ajouter coller des 2-cellules sur $\text{Cayl}^R(X)$, qui correspondent à l'axiome (Q0) : pour tout $a \in X$,



On va noter $\text{Cayl}^Q(X)$ le CW-complexe ainsi construit. Ajouter ces 2-cellules équivaut à trivialisier les lacets de la forme suivante avec pour origine x_0 :



Définition 2.3. Soit X un quandle et $x_0 \in X$. Alors on note K_{x_0} le sous-groupe distingué de $\text{Stab}_{G_X}(x_0)$ engendré par $\{ge_{x_0 \cdot g}g^{-1}, g \in G_X\}$.

Ainsi,

$$\pi_1(\text{Cayl}^Q(X), x_0) = \text{Stab}_{G_X}(x_0)/K_{x_0}$$

On cherche alors à montrer l'isomorphisme suivant :

$$\text{Stab}_{G_X}(x_0)/K_{x_0} \cong \text{Stab}_{G_X}(x_0) \cap \ker(\varepsilon)$$

C'est le lemme suivant qui nous permet de définir le morphisme recherché.

Lemme 2.4. $K_{x_0} = \langle e_{x_0} \rangle$ et est central dans $\text{Stab}_{G_X}(x_0)$.

Démonstration. Soit $g \in G_X$. Alors en se rappelant de la présentation de G_X par générateurs et relations, on a

$$ge_{x_0 \cdot g}g^{-1} = gg^{-1}e_{x_0 \cdot g \cdot g^{-1}} = e_{x_0}.$$

Ainsi, K_{x_0} est le sous-groupe distingué de $\text{Stab}_{G_X}(x_0)$ engendré par e_{x_0} . On a de plus

$$\forall h \in \text{Stab}_{G_X}(x_0), \quad h^{-1}e_{x_0}h = e_{x_0 \cdot h} = e_{x_0}$$

et donc e_{x_0} est central dans $\text{Stab}_{G_X}(x_0)$. □

Théorème 2.5. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Stab}_{G_X}(x_0) &\longrightarrow \text{Stab}_{G_X}(x_0) \cap \ker(\varepsilon) \\ g &\longmapsto ge_{x_0}^{-\varepsilon(g)} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes surjectif qui se factorise en un isomorphisme

$$\text{Stab}_{G_X}(x_0)/K_{x_0} \cong \text{Stab}_{G_X}(x_0) \cap \ker(\varepsilon).$$

2. QUANDLES

Démonstration. Vérifions d'abord que φ est bien défini. Pour $g \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$, on a $\varepsilon(\varphi(g)) = \varepsilon(g) + \varepsilon(e_{x_0}^{-\varepsilon(g)}) = \varepsilon(g) - \varepsilon(g) = 0$.

D'après le lemme, φ est un morphisme de groupes : $\forall g_1, g_2 \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$,

$$\varphi(g_1 g_2) = g_1 g_2 e_{x_0}^{-\varepsilon(g_1) - \varepsilon(g_2)} = g_1 e_{x_0}^{-\varepsilon(g_1)} g_2 e_{x_0}^{-\varepsilon(g_2)} = \varphi(g_1) \varphi(g_2).$$

De plus, φ est clairement surjective.

Montrons que $\ker(\varphi) = K_{x_0}$. Soit $g \in \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ tel que $g e_{x_0}^{-\varepsilon(g)} = e$. Alors $g = e_{x_0}^{\varepsilon(g)} \in K_{x_0}$. On a aussi $\varphi(e_{x_0}) = e_{x_0} e_{x_0}^{-1} = e$.

Ainsi, $K_{x_0} = \ker(\varphi)$ et donc par théorème d'isomorphisme, φ se factorise en un isomorphisme

$$\text{Stab}_{G_X}(x_0)/K_{x_0} \cong \text{Stab}_{G_X}(x_0) \cap \ker(\varepsilon).$$

□

On obtient alors le résultat suivant, dont la démonstration est analogue au cas des racks.

Théorème 2.6 (Eisermann). Soit X un quandle. Notons \mathcal{O} l'ensemble des orbites de X sous l'action de G_X , et $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{O}}$ une famille de représentants des orbites. Alors

$$H_2^Q(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}} [\text{Stab}_{G_X}(x_\alpha) \cap \ker(\varepsilon)]_{Ab}$$

On peut remarquer que dans le cas connexe, $\ker(\varepsilon)$ est en fait le sous-groupe dérivé de G_X ([2]).

Proposition 2.7. Soit X un quandle connexe. Alors

$$\ker(\varepsilon) = [G_X, G_X]$$

où $[G_X, G_X]$ est le sous-groupe dérivé de G_X .

Démonstration. Il est clair que $[G_X, G_X] \subset \ker(\varepsilon)$. Considérons $\ell : G_X \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\ell(g) = n$ si $g = e_{x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots e_{x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ est une bonne expression de g , c'est à dire un mot représentant g avec un nombre minimal de générateurs de G_X . Montrons que $\ker(\varepsilon) \subset [G_X, G_X]$ par récurrence sur $\ell(g)$ pour $g \in \ker(\varepsilon)$.

Si $\ell(g) = 2$, alors $g = e_{x_i}^{\varepsilon_i} e_{x_j}^{-\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Puisque X est connexe, il existe $h \in G_X$ tel que $x_i = x_j \cdot h$. Ainsi, $g = h^{-1} e_{x_j}^{\varepsilon_i} h e_{x_j}^{-\varepsilon_i} \in [G_X, G_X]$.

2. QUANDLES

Si $\ell(g) > 2$, alors il existe une bonne expression de g telle que $g = g_1 e_{x_i}^{\varepsilon_i} e_{x_j}^{-\varepsilon_i} g_2$, $(x_i, x_j) \in X^2$, $(g_1, g_2) \in G_X^2$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. D'une part, on a

$$0 = \varepsilon(g) = \varepsilon(g_1) + \varepsilon(g_2)$$

et donc par hypothèse de récurrence, $g_1 g_2 \in [G_X, G_X]$ car $\ell(g_1 g_2) < \ell(g)$. D'autre part, puisque $e_{x_i}^{\varepsilon_i} e_{x_j}^{-\varepsilon_i} \in [G_X, G_X]$ et que $[G_X, G_X]$ est distingué dans G_X ,

$$g = (g_1 e_{x_i}^{\varepsilon_i} e_{x_j}^{-\varepsilon_i} g_1^{-1})(g_1 g_2) \in [G_X, G_X]$$

□

Lorsque X est fini, on peut exprimer $H_2^Q(X)$ dans un groupe fini. Pour cela, nous aurons besoin du lemme 1.28.

Proposition 2.8. Soit X un quandle connexe et $x_0 \in X$. Alors

$$\text{Stab}_{G_X}(x_0)/K_{x_0} \cong \text{Stab}_{\overline{G}_X}(x_0)/\overline{K_{x_0}}$$

où $\overline{K_{x_0}}$ est l'image de K_{x_0} par la projection canonique $\pi : G_X \rightarrow \overline{G}_X$.

Démonstration. Puisque l'action de G_X sur X est induite par celle de \overline{G}_X , la projection $\pi : G_X \rightarrow \overline{G}_X$ induit un morphisme surjectif

$$\varphi_1 : \text{Stab}_{G_X}(x_0) \longrightarrow \text{Stab}_{\overline{G}_X}(x_0).$$

Puisque $K_{x_0} = \langle e_{x_0} \rangle$ est distingué dans G_X et par surjectivité de φ_1 , $\overline{K_{x_0}} = \langle \overline{e_{x_0}} \rangle$ est distingué et la composée suivante est un morphisme surjectif

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : \text{Stab}_{G_X}(x_0) & \longrightarrow & \text{Stab}_{\overline{G}_X}(x_0) & \longrightarrow & \text{Stab}_{\overline{G}_X}(x_0)/\langle \overline{e_{x_0}} \rangle \\ g & \longmapsto & \overline{g} & \longmapsto & [\overline{g}]_{\overline{e_{x_0}}} \end{array}.$$

On a clairement $\langle e_{x_0} \rangle \subset \ker \varphi$.

Soit maintenant $g \in \ker \varphi$. Alors $[\overline{g}]_{\overline{e_{x_0}}} = \langle \overline{e_{x_0}} \rangle$, donc

$$\overline{g} \in \langle \overline{e_{x_0}} \rangle = \langle e_{x_0} Z_X \cap \text{Stab}_{G_X}(x_0) \rangle$$

et donc il existe $h \in Z_X \cap \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ et $m_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $g = e_{x_0}^{m_0} h$. Si $z \in Z_X$, alors il existe $((x_j, k_j))_{j \in \{1, \dots, n\}} \in (X \times \mathbb{Z})^n$ tels que

$$z = e_{x_0}^{n(x_0)k_0} e_{x_1}^{n(x_1)k_1} \dots e_{x_n}^{n(x_n)k_n}.$$

En particulier, $Z_X \subset \text{Stab}_{G_X}(x_0)$ car $e_{x_j}^{n(x_j)}$ agit trivialement sur x_0 . Or X est connexe, donc pour tout j , il existe $g_j \in G_X$ tel que $x_j = x_0 \cdot g_j$, et donc $n(x_j) = n(x_0)$ et $e_{x_j}^{n(x_j)} = e_{x_0}^{n(x_0)}$. Ainsi, $h = e_{x_0}^{n(x_0)L}$ avec $L \in \mathbb{Z}$. Finalement, $g \in \langle e_{x_0} \rangle$. La proposition est donc démontrée. □

2. QUANDLES

Enfin, le résultat suivant permet d'exprimer le deuxième groupe d'homologie d'un quandle fini et connexe dans un groupe fini. Il se déduit des propositions précédentes.

Théorème 2.9. Soit X un quandle fini et connexe. Soit $x_0 \in X$. Alors

$$H_2^Q(X) \cong \left[\text{Stab}_{\overline{G}_X}(x_0) \cap [\overline{G}_X, \overline{G}_X] \right]_{Ab}.$$

Appliquons ces théorèmes dans le cadre de notre exemple 1.32.

Exemple 2.10. Reprenons l'exemple de $X = \mathbb{Z}_n$ avec n un nombre premier impair. On connaît les éléments de $G_{\mathbb{Z}_n}$: ils sont de la forme $1_{G_{\mathbb{Z}_n}}$ ou $e_0^m e_i$ avec $i \in \mathbb{Z}_n$ et $m \in \mathbb{Z}$. Regardons quels éléments stabilisent 0.

L'élément neutre $1_{G_{\mathbb{Z}_n}}$ stabilise 0.

On a $0 \cdot e_0^m e_i = 0 \cdot e_i = 2i$ car e_0^m agit trivialement sur \mathbb{Z}_n , donc $e_0^m e_i$ stabilise 0 si et seulement si $i = 0$.

Ainsi, les éléments qui stabilisent 0 sont de la forme e_0^w avec $w \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $\text{Stab}_{G_{\mathbb{Z}_n}} = \langle e_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$. On en conclut alors que $H_2^R(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}$.

On peut également calculer l'homologie de quandle de \mathbb{Z}_n . On a

$$\text{Stab}_{\overline{G}_{\mathbb{Z}_n}}(0) \cong \langle e_0 \rangle / \langle e_0 \rangle \cong \{0\}$$

dont on déduit

$$H_2^Q(\mathbb{Z}_n) \cong \{0\}.$$

Bibliographie

- [1] M. Eisermann. Quandle coverings and their galois correspondance. Fund. Math., 225 :103–168, 2014.
- [2] Agustín García Iglesias and Leandro Vendramin. An explicit description of the second cohomology group of a quandle. Mathematische Zeitschrift, 286(3-4) :1041–1063, nov 2016.
- [3] Victoria Lebed and Leandro Vendramin. On structure groups of set-theoretic solutions to the yang–baxter equation. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 62(3) :683–717, jan 2019.